

文章编号: 1000-7598-(2006)08-1403-04

竖向荷载下桩基础弹性分析的改进计算方法

王 伟, 杨 敏

(1. 上海岩土工程勘察设计研究院, 上海 200002; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘 要: 将 Randolph 剪切位移方法中桩身位移与桩端位移的函数关系简化为一多项式, 并与 Poulos 积分方程中土体柔度系数矩阵相结合, 提出了一种竖向受荷单桩弹性分析的改进计算方法, 从而避免了 Poulos 积分方程法中的差分运算以及由此带来的其他矩阵运算, 同时比 Randolph 方法更能准确模拟桩身剪切应力的分布, 并将单桩的改进计算方法应用于群桩分析。将改进的计算方法与 Poulos、Randolph 方法以及 Chow 混合方法的单桩和群桩计算结果进行了比较, 结果表明: 改进计算方法是可行的, 可满足精度要求。

关 键 词: 桩基础; 简易分析; 剪切位移法; 积分方程法

中图分类号: TU 473.1

文献标识码: A

An improved elastic analysis method of pile foundation under vertical loading

WANG Wei, YANG Min

(1. Shanghai Geotechnical Investigation & Design Institute, Shanghai 200002, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The simplified analysis method of single pile subjected to vertical loading combined soil displacement factors matrix in Poulos's integral equation method with the polynomial linked pile body and pile tip displacement which is deduced from Randolph's shear displacement method. So the finite difference calculation in integral equation method is out of need herein. The method is more accurate to characterize shear stress allocation than Randolph method. Pile group under vertical loading can also be analyzed with the simplified method. Comparison with Poulos method, Randolph method and Chow's hybrid method for single pile and pile group analysis show that the simplified method is feasible and accurate.

Key words: pile foundation; simplified analysis; shear displacement method; integral equation method

1 引 言

竖向荷载作用下单桩分析方法之一——Poulos 积分方程法^[1]的分析步骤分为三步: (1) 将 Mindlin 弹性基本解^[2]沿桩周和桩端进行面积积分, 形成土体位移柔度矩阵; (2) 将联系桩身位移和桩侧剪力的微分方程进行差分, 形成桩身系数矩阵; (3) 通过矩阵的运算形成待求解方程组, 并求得桩侧剪力, 进而得到土体或桩身的位移。

竖向荷载作用下单桩分析方法之一——Randolph 剪切位移方法^[3], 通过直接求解偏微分方程给出了单桩分析的解析解, 其分析过程简洁, 但包含了诸多的假定。其中一个重要的假定是剪切变形的影响半径 r_m 为常量, 实际上该值从桩顶至桩端是变化的, 桩端对应的值小而桩顶对应的值大。Randolph 在形成求解的单桩偏微分方程时所使用的 r_m 表达式, 是与 Poulos 积分方程法求得的桩侧土体位移曲

线进行拟合而确定的^[3]。既然 r_m 表达式的系数是通过位移拟合确定的, Randolph 方法求得的 w_t/w_b (w_t 为桩顶位移, w_b 为桩端位移) 和 $P_t/(G_s r_0 w_t)$ (P_t 为桩顶荷载, G_s 为土体剪切模量, r_0 为桩半径) 与 Poulos 方法相吻合。但 Randolph 方法对于桩侧剪应力的分析结果精度相对要低一些。

为了减小 Poulos 单桩分析的复杂性和弥补 Randolph 方法计算桩侧剪应力精度上的不足, 借助 Randolph 方法中 w_t/w_b 的函数关系式, 省去 Poulos 方法中关于桩体微分方程的差分分析过程, 仅利用其土体位移柔度矩阵来进行单桩的分析, 提出了一种竖向受荷桩基础弹性分析的改进计算方法。

2 桩基础改进分析过程

2.1 Poulos 积分方程法的求解过程

竖向荷载作用下单桩分析中土体的位移方程为^[4]

$$[s^p] = \frac{d}{E_s} [s^1] [\tau] \quad (1)$$

式中 $[s^p]$ 为土体位移列阵; $[s^1]$ 为土体位移柔度矩阵; $[\tau]$ 为桩周剪应力列阵; d 为桩径; E_s 为土体弹性模量。

对于桩身的微分方程进行等间距 (桩身部分) 和不等间距 (桩端处) 的差分运算, 可得到下式^[1]:

$$[\tau] = \frac{d}{4\delta^2} E_p R_A [p^1] [p^p] + [Y] \quad (2)$$

式中 δ 为桩身单元长度; E_p 为桩的弹性模量; R_A 为面积率; $[p^1]$ 为桩身系数矩阵; $[p^p]$ 为桩身位移; $[Y]$ 为与桩顶荷载相关的列阵, 具体表达式见文献^[1]。

根据土体和桩身的位移协调条件, 由式 (1) 和式 (2) 可得出: ^[1]

$$[\tau] = \left[[I] - \frac{n^2}{4 \left(\frac{L}{d} \right)^2} \frac{E_p R_A}{E_s} [p^1] [s^1] \right]^{-1} [Y] \quad (3)$$

式中 $[I]$ 为单位矩阵; n 为桩身划分单元的数目; L 为桩长, 其他符号意义同前。

通过式 (3) 可求得桩身的剪应力分布, 进而由式 (1) 可求出土体 (或桩身) 的位移。

2.2 Randolph 剪切位移法中的位移关系

Randolph (1978 年) 认为竖向受荷单桩的桩身位移与桩端位移存在以下关系^[3]:

$$w(z) = w_b \operatorname{ch}[\mu(L-z)] \quad (4)$$

式中 $w(z)$ 为深度 z 处的桩身位移; z 为深度变量; μ 由以下 4 式确定:

$$r_m = 2.5\rho L(1-\nu) \quad (5)$$

$$\zeta = \ln(r_m/r_0) \quad (6)$$

$$\lambda = E_p / G_s \quad (7)$$

$$(\mu L)^2 = [2/(\zeta\lambda)](L/r_0)^2 \quad (8)$$

式中 ρ 为桩身中部土体与桩端土体的剪切模量比值; ν 为土体泊松比; r_0 为桩半径。

2.3 单桩的改进计算方法

根据 Poulos 方法中确定的土体位移柔度矩阵 (见式 (1)) 和 Randolph 方法中桩身位移与桩端位移的关系式 (式 (4)), 并应用桩土位移协调关系式, 将式 (4) 代入式 (1) 可形成下面的表达式:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 w_b \\ \beta_2 w_b \\ \vdots \\ \beta_{n+1} w_b \\ P_{(n+2) \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{(n+1),1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{(n+1),1} & s_{(n+1),2} & \cdots & s_{(n+1),(n+1)} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n+1} \end{bmatrix} [\tau]_{(n+1) \times 1} \quad (9)$$

式中 $[\beta]$ 为系数矩阵; $\beta_i = \operatorname{ch}[\mu(L-z_i)]$, $i=1, 2, \dots, n+1$; z_i 为桩单元中心点的纵坐标; P 为桩顶荷载; $[s]$ 为土体位移柔度矩阵; $[\lambda]$ 为系数矩阵, 矩阵中各项为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= 2\pi r_0 L_i, \quad i=1, 2, \dots, n \\ \lambda_{n+1} &= \pi r_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 L_i 为桩单元 i 的长度。

函数 $f(x) = \operatorname{ch}(x) - [1 + 0.5x^2]$ 的图像, 如图 1 所示。函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间的积分值为 8.53×10^{-3} , 结合图 1 可知, 当 $x < 1.0$ 时, $f(x)$ 的值近似等于 0。而桩基中各变量实际分布的范围如表 1 所示, 根据表 1 中参数的范围和图 1 中函数曲线可知, $\operatorname{ch}[\mu(L-z)]$ 可以用多项式 $1 + 0.5[\mu(L-z)]^2$ 来代替。从而式 (9) 中系数矩阵 $[\beta]$ 可由下式确定:

$$\beta_i = 1 + 0.5[\mu(L-z_i)]^2 \quad (11)$$

式 (11) 中 μ 可由式 (8) 求得, z_i 为桩单元中心点的纵坐标。

表 1 各变量实际分布范围

变量	分布范围	变量	分布范围
L/d	10~50	ζ	2.5~6.5
E_p/G_s	200~30 000	μL	0.01~0.50

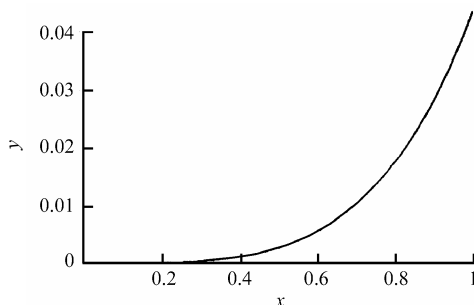


图 1 $y=f(x)=\operatorname{ch}(x)-[1+0.5x^2]$ 函数曲线

Fig.1 Curve of function: $y=f(x)=\operatorname{ch}(x)-[1+0.5x^2]$

上述单桩的分析过程将 Poulos 方法中求解土体位移柔度矩阵和 Randolph 桩身位移与桩端位移的关系结合起来, 从而省去了式 (2) 以及式 (3) 中一些相关的矩阵运算。同时该方法对于桩身单元的划分没有限制, 单元的长度可以不同, 因为不再需要桩身等间距的差分计算。

2.4 群桩的改进计算方法

在上述单桩的改进计算方法基础上, 采用 Poulos 相互作用系数方法^[5]将其应用于群桩分析, 群桩中各桩桩顶沉降采用下式计算:

$$\omega_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \omega_j P_j \alpha_{kj} + \omega_k P_k \quad (12)$$

式中 ω_k 为群桩中 k 桩的沉降; ω_{1k} 为 k 桩在单位荷载下的沉降; ω_j 为 j 桩在单位荷载下的沉降; α_{kj}

为 j 桩和 k 桩的相互作用系数, P_j 为 j 桩桩顶荷载;
 P_k 为 k 桩桩顶荷载。

3 分析结果的比较

3.1 单桩分析

为了验证文中改进计算方法的可行性和其精度, 首先进行单桩分析结果的比较。选取的单桩示例如表 2 所示, 分别计算了刚性单桩和柔性单桩 2 种情况下桩周剪切应力、桩身轴力和桩身位移沿桩长的分布情况, 并与 Poulos 积分方程法和 Randolph 剪切位移方法的计算结果进行了比较。Randolph 剪切位移方法中刚性单桩的分析不包含桩体弹模 E_p 值^[3], 为理想绝对刚性材料, 这对于比较的分析结果可能会有影响。

表 2 单桩分析计算参数表
Table 2 Parameters of single pile analysis

参量	数值	参量	数值
桩长 L/m	25	柔性桩弹性模量/MPa	100
桩径 d/m	1	刚性桩弹性模量/MPa	10 000
土体泊松比 ν	0.5	土体弹性模量/MPa	2

(1) 单桩的桩周剪应力分布情况见图 2。对于刚性单桩, 本文的改进计算方法和 Poulos 方法吻合性很好, Randolph 方法对刚性桩假定剪切应力为常值, 故在图中为一直线。对于柔性桩, 桩身下部的剪切应力 3 种方法吻合性较好, 而在桩顶处改进计算方法的结果位于 Randolph 方法和 Poulos 方法之间。由该图可以得出, 尽管 Randolph 方法的位移与其他方法相近, 但剪切应力分布有较大的不同。

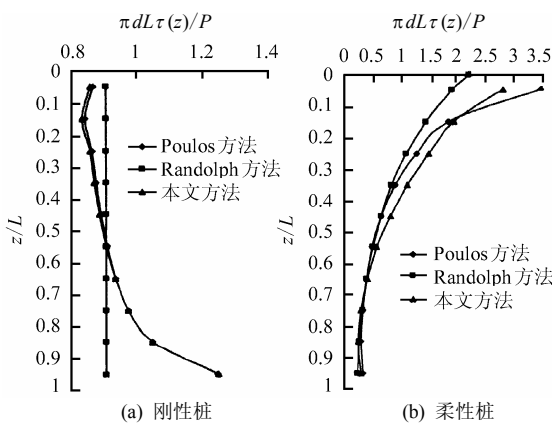


图 2 单桩桩身剪应力分布比较
Fig.2 Comparison of shear stress allocation along pile for single pile

(2) 单桩的桩身轴力分布情况见图 3。对于刚性桩, 改进计算方法和 Poulos 方法的结果基本重合, 略大于 Randolph 方法。对于柔性桩, 3 种分析方法仅在桩顶附近有所不同, Randolph 分析方法的结果偏小。

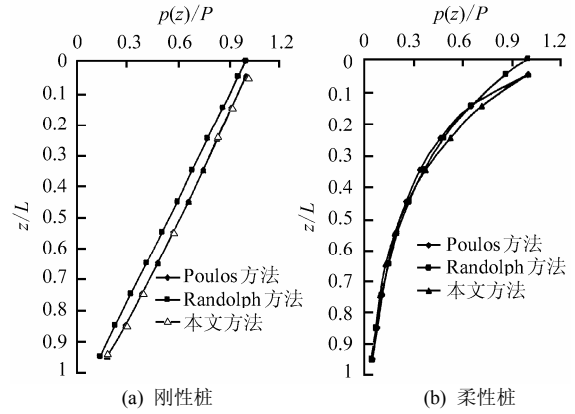


图 3 单桩桩身轴力分布比较
Fig.3 Comparison of axial force allocation along pile for single pile

(3) 单桩的桩身位移分布情况见图 4。对于刚性桩, Randolph 方法假定此时桩身各点的沉降均相同, 从而在图中为一直线, 改进计算方法和 Poulos 方法结果相近。对于柔性桩, 3 种方法尽管在桩端处有所不同, 但桩顶处沉降值比较一致。

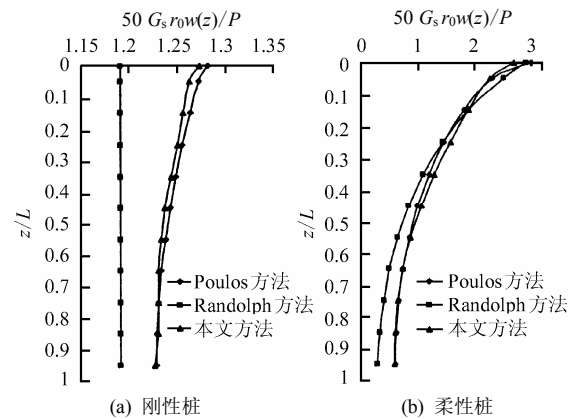


图 4 单桩桩身位移分布比较
Fig.4 Comparison of pile displacement for single pile

3.2 群桩分析

为了验证文中改进计算方法在群桩分析中的合理性, 采用 Poulos 方法^[5, 6]、Randolph 方法^[7]和 Chow 混合方法^[8] 3 种分析方法与之进行了比较。选取一 3×3 群桩基础, 分析了筏板为绝对刚性高承台和绝对柔性高承台 2 种情形。群桩中角点处桩取为 1 号, 边中点处桩取为 2 号, 中心点桩取为 3 号。桩间距 $s=5\text{ m}$, 其他分析参量与单桩相同, 见表 2。

(1) 对于绝对刚性高承台下的群桩基础, 群桩中各桩桩顶荷载 P_i 与平均荷载 P_{ave} 的比值分布情况如图 5 所示。当桩为刚性桩时, 4 种分析方法的结果比较接近。当桩为柔性桩时, 中心点处桩的计算值相差较大。

(2) 对于绝对柔性高承台下的群桩基础, 桩顶沉降的分布情况如图 6 所示。无论桩为刚性桩还是柔性桩, 本文的改进计算方法、Poulos 方法和 Chow

方法的计算结果比较接近,而 Randolph 方法的计算结果偏离较大。

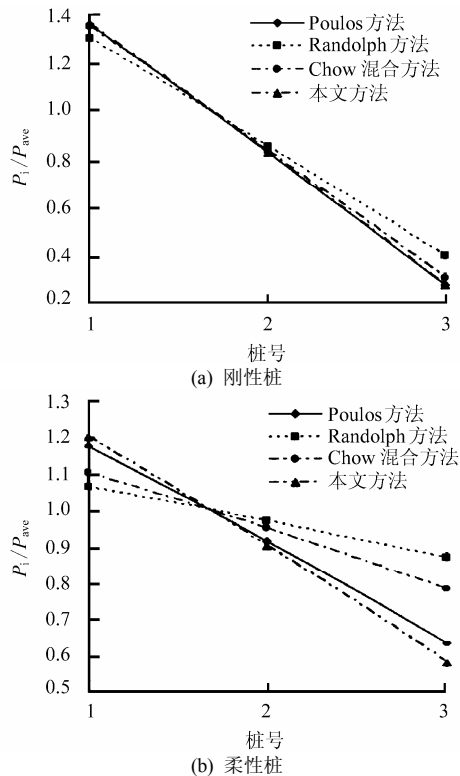


图 5 刚性板下群桩荷载分布比较

Fig.5 Comparison of each pile load in pile group under infinite stiffness plate

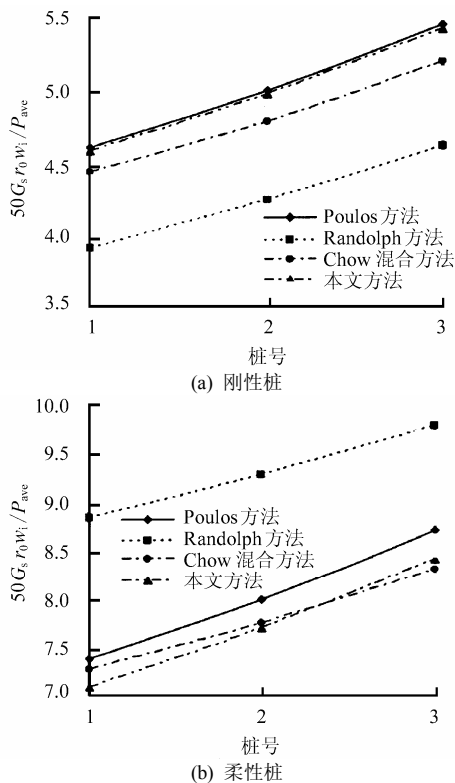


图 6 柔性板下群桩位移分布比较

Fig.6 Comparison of each pile displacement in pile group under infinite flexity plate

4 结 论

竖向荷载作用下桩基弹性分析的改进计算方法是将 Randolph 剪切位移方法中桩身位移与桩端位移的函数关系简化为一多项式,并将其与 Poulos 积分方程中土体柔度系数矩阵相联系,进而求得桩身剪切应力、轴力和位移分布。它避免了 Poulos 积分方程中的差分运算以及由此带来的矩阵运算,比 Randolph 方法更能准确模拟桩身剪切应力的分布。而且该分析方法中不再需要桩身单元的等间距划分,单元长度可以不同。

与 Poulos 积分方程法和 Randolph 剪切位移方法进行了单桩分析结果的比较,并与 Poulos 方法、Randolph 方法以及 Chow 混合方法的群桩计算结果进行了比较,比较结果表明:桩基弹性分析的改进计算方法是可行的,分析精度也满足要求。

参 考 文 献

- [1] Mattes N S, Poulos H G. Settlement of single compressible pile[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division(ASCE)*, 1969, 95(1): 189—207.
- [2] Mindlin R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. *Physics*, 1936, 7: 195—202.
- [3] Randolph M F, Wroth C P. Analysis of deformation of vertically loaded piles[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering(ASCE)*, 1978, 104(12): 1 465—1 488.
- [4] Poulos H G, Davis E H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers[J]. *Geotechnique*, 1969, 18: 351—371.
- [5] Poulos H G, Davis E H. Pile foundation analysis and design[M]. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [6] Poulos H G. Analysis of the settlement of pile groups[J]. *Geotechnique*, 1968, 18: 449—471.
- [7] Randolph M F, Wroth C P. An analysis of the vertical deformation of pile groups[J]. *Geotechnique*, 1979, 29(4): 423—439.
- [8] Chow Y K. Analysis of vertically loaded pile groups[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1986, 10: 59—72.